AULA 9 - GUIA DE ESTUDO

Abstract. Nesta aula começaremos por (re)ver os conceitos de convergência de sucessões na topologia fraca e fraca* (lê-se fraca-estrela, ou weak-star, em inglês), culminando com o Teorema de Banach-Alaoglu.

Na segunda parte, provaremos algumas desigualdades importantes, da qual se destacam a generalização da desigualdade de Minkowski de somas para integrais.

1. **Revisão da aula passada.**

Relembre-se que na última aula viu-se o recíproco da desigualdade de Hölder, que diz que num espaço de medida semi-finita, se se tem uma função f mensurável tal que $fg \in L^1$ para todo o $g \in L^q$ e além disso se tem uma constante $C_f \geq 0$ tal que

$$\left| \int fg \right| \leq C_f \|g\|_{L^q},$$

então $f \in L^p$, com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, $1 \leq p, q \leq \infty$, e $\|f\|_{L^p} \leq C_f$. Em rigor, vimos uma versão um pouco mais geral e técnica deste resultado, usando apenas funções "de teste" g simples, que se anulam fora dum conjunto de medida finita, com norma L^q unitária (ver os detalhes no sumário da aula passada ou no Teorema 6.14 de [1]). Mas esta é essencialmente a ideia. Este teorema é importantíssimo e constantemente subjacente à utilização de argumentos de dualidade, em espaços L^p, do qual veremos um exemplo na prova da desigualdade integral de Minkowski, mais à frente nesta aula.

Em segundo lugar, na última aula, usámos este teorema, do recíproco da desigualdade de Hölder, conjuntamente com o teorema de Radon-Nikodym, para provar o Teorema de Riesz que estabelece que, para $1 < p, q < \infty$ com $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ a injecção isométrica, que já tínhamos concluído anteriormente, entre L^p e $(L^q)'$, é mesmo uma sobrejecção. Para $p = \infty$ e $q = 1$ o resultado ainda é válido, quando o espaço é de medida σ-finita, sendo em geral falso para $p = 1$ e $q = \infty$ (ver os detalhes no Teorema 6.15 de [1]). Ou seja, podemos identificar o dual de L^q com L^p, porque temos uma bijecção isométrica entre os dois espaços: um isomorfismo, portanto. A partir de agora faremos então a identificação e escreveremos $L^p = (L^q)'$ nas condições em que a bijecção é válida, e note-se que é por este facto que é frequente usar-se a notação p e p' para os expoentes duais, ou conjugados, dos espaços L^p, ou seja tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, e assim $L^{p'} = (L^p)'$.

O primeiro corolário deste resultado absolutamente central, e muito profundo, da teoria dos espaços L^p, é que eles são sempre reflexivos, ou seja, satisfazem $L^p = (L^p)''$, para $1 < p < \infty$.

Por outro lado, para L^1 e L^∞, em espaços de medida σ-finita como são $\mathbb{R}^n$ e os seus subconjuntos, com a medida de Lebesgue, tem-se sempre $L^\infty = (L^1)'$. Mas apesar de sempre se ter, para qualquer espaço de medida, a injecção isométrica $L^1 \hookrightarrow (L^\infty)'$, quase nunca ela é bijectiva. Um exemplo de um funcional em $(L^\infty)'$ que não é representável por uma função em L^1 pode, por exemplo em $\mathbb{R}$ com a medida de Lebesgue, ser facilmente recordado como sendo o delta de Dirac. Em rigor é o delta de Dirac, como funcional sobre as funções contínuas e limitadas $C_b(\mathbb{R})$ que, com a norma do supremo, é um subespaço de $L^\infty(\mathbb{R})$, estendido a todo ele por Hahn-Banach. Sugiro a leitura da pg.191 de [1], onde o autor analisa cuidadosamente, com exemplos, as possíveis falhas de injectividade e sobrejectividade entre L^1 e L^∞.

Date: March 26, 2020.

2. Convergência fraca e fraca*. Teorema de Banach-Aloglu.

Material de estudo: Dar uma vista de olhos - não precisa ser em detalhe - à secção **5.4 Topological Vector Spaces** do livro de Folland [1], em particular desde o fim da pg. 168 até ao final da secção, na pg. 170.

A ideia desta primeira parte da aula não é aprofundar em detalhe os conceitos de topologias fraca e fraca*, e da correspondente convergência de sucessões nessas topologias. Em condições ideais isso teria sido coberto anteriormente numa disciplina de Análise Funcional. O meu objectivo é apenas rever, ou no caso de quem nunca viu, tocar nas definições essenciais e no enunciado do Teorema de Banach-Alaoglu, mesmo que apenas como "black boxes" sem necessidade de ver demonstrações. Claro que quem quiser fazê-lo em detalhe - o que é sempre recomendável (mas não indispensável para esta disciplina) - terá que ler toda a secção 5.4 sobre espaços vectoriais topológicos, com algumas referências a factos de topologia cobertos no capítulo 4 do livro.

Num espaço vectorial normado $(X, \|\cdot\|_X)$ a **topologia fraca em X** é a topologia fraca gerada pelos funcionais de X', ou seja, a topologia mais fraca que ainda garante a continuidade de todos os funcionais $\lambda \in X'$ (rever o conceito de topologia fraca gerada por um conjunto de funções, em topologia). A topologia da norma $\|\cdot\|_X$ é evidentemente mais forte que a topologia fraca, visto que a priori, por definição, X' é o conjunto dos funcionais contínuos em X na topologia da norma. Se X é de dimensão infinita, é possível mostrar que a topologia fraca é sempre estritamente mais fraca que a topologia da norma.

É possível mostrar (ver os detalhes na secção 5.4 de [1]) que a convergência de sucessões $\{x_n\}$ em X na topologia fraca, denominada **convergência fraca**, corresponde a testar a convergência da sucessão de números $\lambda(x_n)$ para cada $\lambda \in X'$. Apresentarei aqui como uma definição (mas em rigor é uma consequência lógica da definição de convergência de sucessões em espaços topológicos e da definição de topologia fraca).

Definição 2.1. *Seja $\{x_n\}$ uma sucessão no espaço vectorial normado X. Diz-se que x_n converge fracamente para $x \in X$, e escreve-se $x_n \rightharpoonup x$, se $\lambda(x_n) \to \lambda(x)$ para todo o $\lambda \in X'$.*

Evidentemente, se $x_n \to x$ na norma de X, então pela continuidade dos $\lambda \in X$ na topologia da norma tem-se $\lambda(x_n) \to \lambda(x)$ e consequentemente $x_n \rightharpoonup x$. Ou, dito doutra forma, dado que a topologia da norma é mais forte que a topologia fraca, $x_n \to x \Rightarrow x_n \rightharpoonup x$. Mas em geral o recíproco é falso, em espaços de dimensão infinita, devido à diferença das duas topologias.

Se fizermos a transposição desta definição para a relação entre o dual X' e o duplo dual X'', podemos analogamente definir a convergência fraca de sucessões de funcionais $\{\lambda_n\}$ em X' testando a convergência das sucessões de números $\phi(\lambda_n)$ para todo o $\phi \in X''$. Esta é a convergência de sucessões definida pela topologia fraca em X' gerada pelos elementos do seu dual X''. No entanto, verifica-se ser mais interessante a topologia fraca gerada em X', não pelo total de elementos de X'', mas apenas pelo subconjunto dos elementos correspondentes à identificação isométrica $X \hookrightarrow X''$: chama-se **topologia fraca***. Em geral, nesta identificação X é um subconjunto estrito de X'', donde a topologia fraca* em X' é ainda mais fraca que a topologia fraca em X', visto ser gerada por um conjunto estritamente menor de funcionais em X''. Evidentemente as duas topologias coincidem quando o espaço é reflexivo, caso em que $X = X''$. Como a identificação de X em X'' é feita através da relação $x \in X \mapsto \hat{x} \in X''$, com $\hat{x}(\lambda) = \lambda(x)$ para $\lambda \in X'$, conclui-se imediatamente que a convergência fraca* de sucessões em X' corresponde à convergência pontual dessa sucessão de funcionais.

Definição 2.2. *Seja $\{\lambda_n\}$ uma sucessão em X'. Diz-se que se tem convergência fraca* de λ_n para $\lambda \in X'$, e escreve-se $x_n \overset{*}{\rightharpoonup} x$, se $\lambda_n(x) \to \lambda(x)$ para todo o $x \in X$.*

Do ponto de vista de espaços L^p, como vimos na aula passada que são reflexivos para $1 < p < \infty$, não há distinção entre convergência fraca e convergência fraca* nestes espaços. Portanto, para estes valores de p, uma sucessão de funções $\{f_n\}$ em L^p converge na topologia fraca ou na topologia fraca* para $f \in L^p$ se e só se

$$\int f_n g \to \int fg \quad \text{para todo} \quad g \in L^q, \quad \text{com} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{p} = 1.$$

Para L^1 e L^∞, no entanto, que não são em geral reflexivos, a distinção entre convergência fraca e fraca* já existe. Relembrámos no início desta aula que é sempre verdadeira a injecção isométrica $L^1 \hookrightarrow (L^\infty)'$ mas que geralmente não é sobrejectiva. Por outro lado, em espaços de medida σ-finitos, como é o caso de $\mathbb{R}^n$ ou dos seus subconjuntos que iremos quase exclusivamente usar nesta disciplina, aí já se tem $L^\infty = (L^1)'$, resultando no facto já sabido que $L^1 \hookrightarrow (L^\infty)' = (L^1)''$. O delta de Dirac na origem em $\mathbb{R}$ é um exemplo dum elemento de $(L^1(\mathbb{R}))''$ que não está em $L^1(\mathbb{R})$. Portanto, é clara a diferença entre convergência fraca e fraca* em L^∞: a convergência fraca duma sucessão $\{f_n\}$ em L^∞ consiste em testar a convergência de $\lambda(f_n)$ para todo o $\lambda \in (L^\infty)' = (L^1)''$, incluindo por exemplo $\lambda = \delta$, enquanto que a convergência fraca* (menos exigente) consiste só em fazer esse teste com o subconjunto estrito das funções L^1

$$f_n \overset{*}{\rightharpoonup} f \quad \text{em} \quad L^\infty \quad \text{quando} \quad \int f_n g \to \int fg \quad \text{para todo} \quad g \in L^1.$$

Note-se, no entanto, que trocando os papéis de L^∞ e L^1 aqui, não teríamos a convergência fraca* duma sucessão $\{f_n\}$ em L^1, mas sim convergência fraca, já que neste caso é exactamente $L^\infty = (L^1)'$ e portanto testar a convergência de $\{f_n\}$ com todos os elementos $g \in L^\infty$ é fazer o teste com todos os funcionais do dual de L^1.

O que é provavelmente o resultado central do estudo da topologia fraca* é o Teorema de Banach-Alaoglu, que permite concluir que bolas fechadas em X', na topologia da norma, são compactas na topologia fraca*. Para se perceber como é profundo e surpreendente este resultado, recorde-se que uma propriedade que permite distinguir um espaço normado de dimensão finita de um de dimensão infinita é precisamente a compacidade de bolas fechadas (ver p.ex. o exercício 6, pg.155 de [1] ou o Teorema 2.5-5 de [2] - livro muito bom e claríssimo de análise funcional, que recomendo vivamente a quem quer dar uma vista de olhos ou até estudar mais profundamente o tema).

Teorema 2.3. *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço normado. Então, a bola fechada $\{x \in X : \|x\|_X \leq 1\}$ é compacta na topologia da norma se e só se X tem dimensão finita.*

Portanto, em espaços normados de dimensão infinita bolas fechadas nunca são compactas. Por isso, é tão importante e surpreendente o seguinte teorema, assim como o conceito de topologia fraca* (Teorema 5.18 de [1]).

Teorema 2.4. (Banach-Alaoglu) *Seja $(X, \|\cdot\|_X)$ um espaço normado. Então, a bola fechada em X', $\{\lambda \in X' : \|\lambda\|_{X'} \leq 1\}$ é compacta na topologia fraca*.*

Em espaços métricos a compacidade permite extrair subsucessões convergentes de sucessões limitadas. Mas as topologias fraca e fraca* não são metrizáveis. No entanto, basta que X seja separável (relembre-se de topologia que se diz que um espaço topológico é separável quando tem um subconjunto contável denso) para, restrita a bolas fechadas, a topologia fraca* ser metrizável (apesar de não o ser para todo o espaço X', conforme o exercício 49 d) na pg.170 de [1]). De facto, quando X é separável, a topologia fraca* em bolas fechadas é "2nd countable" (exercício 50 na pg.171 de [1]) e pelo teorema de metrização de Urysohn (teorema 4.58 de [1]) isso implica que é metrizável nessas bolas. Portanto tem-se a seguinte proposição.

Proposição 2.5. *Seja X um espaço normado separável. Então, qualquer sucessão $\{\lambda_n\}$ limitada em X' tem uma subsucessão que converge na topologia fraca*.*

Voltemos aos espaços L^p. É bem conhecido, de teoria de medida, que os espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$ são separáveis para $1 \leq p < \infty$, tal sendo falso para $L^\infty(\mathbb{R}^n)$ (exercício 13, pg. 187 de [1]). Aplicando assim a proposição anterior conjuntamente com este facto, podemos finalmente concluir o seguinte teorema.

Teorema 2.6. *Seja $\{f_n\}$ uma sucessão limitada em $L^p(\mathbb{R}^n)$, com $1 < p \leq \infty$. Então é possível extrair uma subsucessão $\{f_{n_k}\}$ que converge na topologia fraca* (fraca, nos casos $1 < p < \infty$, pela reflexividade), ou seja, existe $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ tal que*

$$\int f_{n_k} g \to \int fg \quad \textit{quando} \quad k \to \infty \quad \textit{para todo} \quad g \in L^q(\mathbb{R}^n), \quad \textit{com} \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1.$$

Vale a pena fazer a observação final de que chegámos a este resultado por via de conceitos abstractos de análise funcional e topologia. Mas é possível provar este resultado directamente para o exemplo concreto de espaços $L^p(\mathbb{R}^n)$. Uma demonstração pode, por exemplo, ser vista em [3], teorema 2.18.

3. Algumas desigualdades importantes em normas L^p.

Material de estudo: Teoremas 6.18 e 6.19 do livro de Folland [1].

Começamos esta secção abordando o que é uma das desigualdades mais úteis, no âmbito dos espaços L^p e em particular de estimativas de operadores integrais: a desigualdade de Minkowski, na sua versão integral. Para a motivar, considere-se a desigualdade de Minkowski habitual, com n funções $f_1, f_2, \ldots, f_n \in L^p(X)$,

$$\left\| \sum_{i=1}^{n} f_i(\cdot) \right\|_{L^p(X)} \leq \sum_{i=1}^{n} \|f_i(\cdot)\|_{L^p(X)}.$$

Agora, se imaginássemos os somatórios como sendo integrais no espaço de medida discreto $I = \{1, \ldots, n\}$, poderíamos reescrever esta última desigualdade como

$$\left\| \int_I f_i(\cdot)\, di \right\|_{L^p(X)} \leq \int_I \|f_i(\cdot)\|_{L^p(X)}\, di.$$

Tal como habitualmente, em Cálculo em $\mathbb{R}$, se "passa um módulo para dentro do integral", aumentando o seu valor, a desigualdade de Minkowski pode assim ser vista como uma forma análoga de "passar", desta feita a norma L^p, para dentro do integral em I. A desigualdade de Minkowski integral generaliza precisamente esta ideia, para espaços de medida gerais, donde a desigualdade de Minkowski habitual para somas de duas funções pode então ser vista apenas como um caso particular desta, em que um dos espaços de medida é simplesmente um espaço discreto com dois pontos $I = \{1, 2\}$.

Teorema 3.1. (Desigualdade de Minkowski integral) *Sejam (X, μ) e (Y, ν) espaços de medida σ-finitos. Então, se $f : X \times Y \to [0, \infty]$ é uma função mensurável na σ-álgebra do espaço produto, tem-se para qualquer $1 \leq p \leq \infty$,*

$$\left\| \int_Y f(\cdot, y)\, d\nu(y) \right\|_{L^p(X,\mu)} \leq \int_Y \|f(\cdot, y)\|_{L^p(X,\mu)}\, d\nu(y), \tag{3.1}$$

admitindo-se, como habitualmente para funções positivas, a possibilidade de qualquer dos membros ser infinito.

Proof. Se o lado direito de (3.1) for infinito, não há nada a demonstrar. Suponha-se, portanto, que $\int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\, d\nu(y) < \infty$ e que $g \in L^q(X,\mu)$, onde q é o expoente conjugado de p. Tem-se então, aplicando o teorema de Fubini, seguido de Hölder na variável x,

$$\int_X \left(\int_Y f(x,y)\, d\nu(y)\right) |g(x)|\, d\mu(x) = \int_Y \left(\int_X f(x,y)|g(x)|\, d\mu(x)\right) d\nu(y) \leq$$
$$\leq \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)} \|g\|_{L^q(X,\mu)}\, d\nu(y) = \int_Y \|f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}\, d\nu(y) \|g\|_{L^q(X,\mu)}.$$

Aplicando finalmente o recíproco da desigualdade de Hölder, obtém-se a conclusão do teorema, assim como a desigualdade (3.1). □

Para funções complexas gerais, basta aplicar o teorema anterior ao módulo da função para obter o corolário seguinte.

Corollary 3.2. *Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços de medida σ-finitos e $f : X \times Y \to \mathbb{C}$ uma função mensurável no espaço produto. Seja $1 \leq p \leq \infty$ e para quase todo o $y \in Y$ seja $x \mapsto f_y(x) = f(x,y)$ uma função no espaço $L^p(X,\mu)$. Então, se a função $y \mapsto \|f(\cdot,y)\|_{L^p(X,\mu)}$ está em $L^1(Y,\nu)$, conclui-se necessariamente que a função $y \mapsto f_x(y) = f(x,y)$ está em $L^1(Y,\nu)$ para quase todo o $x \in X$, a função $x \mapsto \int_Y f(x,y)\, d\nu(y)$ está em $L^p(X,\mu)$ e verifica-se a desigualdade (3.1).*

Observe-se a simplicidade da demonstração baseada no argumento de dualidade, com recurso ao teorema recíproco de Hölder. É possível, na verdade, demonstrar esta desigualdade integral de Minkowski de forma muito análoga à demonstração da desigualdade de Minkowski para duas funções (tente como exercício) mas é uma demonstração mais elaborada, que obriga a partir a função em produtos de diferentes potências, necessidade de ajustar a numerologia dos expoentes L^p para poder aplicar Hölder, etc. Observe-se também que a condição das medidas terem de ser σ-finitas é indispensável para a aplicação do Teorema de Fubini-Tonelli, na troca da ordem das variáveis de integração, a qual é a essência deste resultado.

Terminamos esta aula com um critério bastante simples e útil, para obter estimativas L^p de operadores integrais com núcleos em L^1 em ambas as variáveis.

Dada uma função $K : X \times Y \to \mathbb{C}$, diz-se que ela é o núcleo de um operador integral, quando esse operador é dado por um integral da forma

$$T_K f(x) = \int_Y K(x,y) f(y) dy,$$

para toda a função f num espaço de funções definidas em Y, para as quais o integral faça sentido. Os integrais de convolução entre duas funções $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{C}$, que começaremos a estudar na próxima aula, dados por

$$g * f(x) = \int_{\mathbb{R}^n} g(x-y) f(y) dy,$$

são os operadores integrais por excelência da análise harmónica. O núcleo destes operadores, imaginando por exemplo a função g fixa, são as suas translações $K(x,y) = g(x-y)$. É importante, por isso, termos formas eficientes de garantir que estes operadores estão nalgum espaço L^p, quando as funções f estão noutro, digamos, L^q, dependendo das propriedades do núcleo K. Grande parte dos métodos de análise harmónica modernos consistem precisamente no desenvolvimento de técnicas para garantir este tipo de estimativas, à medida que o núcleo K se torna cada vez menos "simpático". Em particular, toda a teoria de Calderon-Zygmund, para operadores integrais singulares, gira em torno de núcleos singulares, que tipicamente são ilimitados na vizinhança de zero.

Comecemos então com um caso simples, dum núcleo $K(x,y)$ que seja L^1 em cada variável separadamente, q.t.p. na outra. É habitualmente chamado de critério de Schur, ou Schur-Young.

Teorema 3.3. *Sejam (X,μ) e (Y,ν) espaços de medida σ-finitos e $K : X\times Y \to \mathbb{C}$ uma função mensurável na σ-álgebra do espaço produto. Então, se existe $C\geq 0$ tal que*

$$\int_Y |K(x,y)|d\nu(y) \leq C \quad \mu-q.t.p. \quad x\in X$$

$$\int_X |K(x,y)|d\mu(x) \leq C \quad \nu-q.t.p. \quad y\in Y$$

e se $f\in L^p(Y)$, $1\leq p\leq\infty$, tem-se que $K(x,y)f(y)\in L^1(Y)$ μ-q.t.p. $x\in X$ e o operador integral

$$Tf(x) = \int_Y K(x,y)f(y)d\nu(y), \tag{3.2}$$

define μ-q.t.p. $x\in X$ uma função $Tf\in L^p(X)$, com $\|Tf\|_{L^p(X)}\leq C\|f\|_{L^p(Y)}$.

Proof. Os casos $p=1$ e $p=\infty$ são óbvios, sendo que para $p=1$ é suficiente apenas a condição

$$\int_X |K(x,y)|d\mu(x) \leq C \quad \nu-\text{q.t.p.} \quad y\in Y$$

e no caso $p=\infty$ apenas a outra condição

$$\int_Y |K(x,y)|d\nu(y) \leq C \quad \mu-\text{q.t.p.} \quad x\in X.$$

Para $1<p<\infty$ seja q o expoente conjugado. Então

$$\begin{aligned}\int_Y |K(x,y)||f(y)|d\nu(y) &= \int_Y |K(x,y)|^{1/q}|K(x,y)|^{1/p}|f(y)|d\nu(y)\\ &\leq \left(\int_Y |K(x,y)|d\nu(y)\right)^{1/q}\left(\int_Y |K(x,y)||f(y)|^p d\nu(y)\right)^{1/p},\end{aligned}$$

por Hölder. E portanto, usando as hipóteses

$$\int_X\left(\int_Y |K(x,y)||f(y)|d\nu(y)\right)^p d\mu(x) \leq C^{p/q}C\|f\|^p_{L^p(Y)},$$

de onde se obtém o resultado final aplicando raízes-p de ambos os lados. ∎

Note-se que as hipóteses deste teorema não são as únicas combinações de expoentes que proporcionam conclusões deste tipo. Por exemplo, se

$$\left(\int_X |K(x,y)|^p d\mu(x)\right)^{1/p} \leq C \quad \nu-\text{q.t.p.} \quad y\in Y,$$

para $1\leq p<\infty$, ou até, mais geralmente, se $\|K(\cdot,y)\|_{L^p(X)}\leq C$ ν-q.t.p. $y\in Y$ incluindo o caso $p=\infty$, basta aplicar a desigualdade integral de Minkowsky a (3.2) para concluir que, se $f\in L^1(Y)$ se tem $Tf\in L^p(X)$ com $\|Tf\|_{L^p(X)}\leq C\|f\|_{L^1(Y)}$. Mais combinações são possíveis: tente descobrir algumas.

Veremos daqui a duas ou três aulas como é possível obter toda uma família de estimativas deste tipo, bastando apenas obter duas delas com índices p,q extremos, concluindo-se as restantes estimativas para os índices intermédios através de interpolação. Isso será o tema do teorema de interpolação de Riesz-Thorin que iremos estudar.

References

[1] Gerald B. Folland, *Real Analysis, Modern Techniques and Applications,* 2nd Edition, John Wiley & Sons, 1999.
[2] Erwin Kreyszig, *Introductory Functional Analysis With Applications,* John Wiley & Sons, 1978.
[3] Elliot Lieb & Michael Loss, *Analysis,* 2nd Edition, American Mathematical Society, 2001.